Татьяна Алексеевна Леонтьева ТФКП

Литература:

1) Маркушевич А.И. „Теория аналитических функций"

2) Бицадзе А.В. „Основы теории аналит. функций комплексного переменного"

3) Леонтьева Т.А. „Лекции по ТФКП"

1 - много сложных теор. задач, 2 тома или „кирпич"

2 - маленький, „для ленивых"

3 - по лекциям

Задачник для семинаров:

Серов, Панфёров

ЭКЗ
- 1 вопр. по А.А.
- 1 вопр. по ТФКП

17 лекций

Мн-ва (ШПАРГАЛКА)

- z_0 – предельная точка мн-ва E if $\forall \varepsilon > 0$ $\mathring{U}_\varepsilon(z_0) \cap E \neq \varnothing$
- $E \subset \mathbb{C}$ – замкнутое if E содержит все свои пред. точки
- $\bar{E}$ – замыкание E if $\bar{E}$ – минимальное замкн. мн-во т.ч. $E \subset \bar{E}$

- z_0 – внутренняя точка E if $\cancel{\forall \varepsilon > 0}$ $\exists \varepsilon > 0$ т.ч. $U_\varepsilon(z_0) \subset E$
- $O \subset \mathbb{C}$ – открытое if $\forall z \in O$ – внутренняя
- $\mathbb{C}E$ – дополнение E до компл. пл-ти if $\mathbb{C}E = \mathbb{C}/E$

- $E \subset \mathbb{C}$ – ограниченное if $\exists M > 0$ т.ч. $\forall z \in E \Rightarrow |z| < M$
- компакт – ограниченное замкнутое мн-во
- $E \subset \mathbb{C}$ – связное if $\forall E_1, E_2$ т.ч. $E_1 \cup E_2 = E$, $E_1 \neq \varnothing \neq E_2$, $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} E_1 \cap \bar{E}_2 \neq \varnothing \\ E_2 \cap \bar{E}_1 \neq \varnothing \end{array}\right.$
- область – связное открытое мн-во

- $\{O\}$ – система открытых мн-в – наз.-ся покрытием мн-ва E if $\forall z_0 \in E$ $\exists O_{z_0} \in \{O\}$ т.ч. $z_0 \in O_{z_0}$
- $\{O_1\}$ – подпокрытие покрытия $\{O\}$ мн-ва E if $\{O_1\}$ – покрытие E, $\{O_1\} \subset \{O\}$
- Границей E наз. мн-во ∂E т.ч. $\forall z_0 \in \partial E$ $\exists z_1 \neq z_0$, $\exists z_2 \neq z_0$ т.ч. $z_1 \in E$, $z_2 \in \mathbb{C}E$ и $z_1, z_2 \in U_\varepsilon(z_0)$

- ограниченная область $\mathcal{D}$ – односвязная if $\forall$ замкн. кривой $\Gamma \subset \mathcal{D}$ $\operatorname{int} \Gamma \subset \mathcal{D}$
  внутр. область кривой
- область $\mathcal{D}$ – n-связная if $\partial \mathcal{D}$ состоит из n связных компонент, не пересекающихся друг с другом
- AB-жорданова кривая if $z = x(t) + iy(t) = \lambda(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$ осущ. взаимно-однозначное отобр. $[\alpha; \beta)$ и $(\alpha; \beta]$ на свои образы и $\lambda(t) \in C[\alpha; \beta]$
- если $A = B$, то кривая замкнутая
- замкнутая жорданова кривая – контур

Лекция 1. Свойства комплексных чисел. Мн-ва на комплексной пл-ти

- Пару чисел (x,y), $x,y\in\mathbb{R}$, будем называть <u>комплексным числом</u>
- $(x_1,y_1) = (x_2,y_2) \iff \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{cases}$

Сопоставим числам вида $(x,0)$ действ. числа x

$(0,0) = 0$; $(1,0)=1$

- Числа вида $(0,y)$ будем называть <u>чисто мнимыми</u>
- Число $(0,1)$ обозначим буквой i и назовём <u>мнимой единицей</u>
- Введём операции: $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) := (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2;\ x_1y_2+x_2y_1)$$
$$k(x,y) := (kx, ky)$$

Тогда (x,y) можно представить как $x+i\cdot y$

$$(x_1,y_1)-(x_2,y_2) := (x_1-x_2, y_1-y_2)$$
$$(x_2,y_2)\neq 0 \Rightarrow \frac{(x_1,y_1)}{(x_2,y_2)} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{x_1x_2+y_2y_1}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

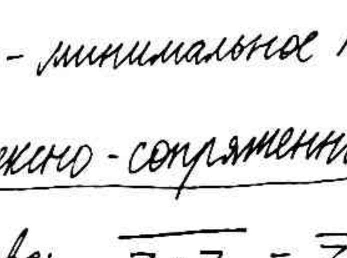
Мн-во компл. чисел является полем и обозначается $\mathbb{C}$

▸ $\mathbb{C}$ - минимальное поле, включающее в себя $\mathbb{R}$ и $\{i\}$

- <u>Комплексно-сопряженным</u> числа $z=x+iy$ наз.-ся число $\bar{z}=x-iy$

Свойства: $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$; $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$; $z_2\neq 0 \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

- Для числа $z_0=x_0+iy_0$ введём обозначения:



$\operatorname{Re} z_0 := x_0$ - действ. часть

$\operatorname{Im} z_0 := y_0$ - <u>мнимая часть</u>

$|z| := \sqrt{x_0^2+y_0^2}$ - <u>модуль</u>

$$\arg z := \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x>0 \\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x<0, y\geq 0 \\ -\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x<0, y<0 \\ \frac{\pi}{2}, & x=0, y>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x=0, y<0 \end{cases}$$
- аргумент

$\operatorname{Arg} z := \arg z + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$

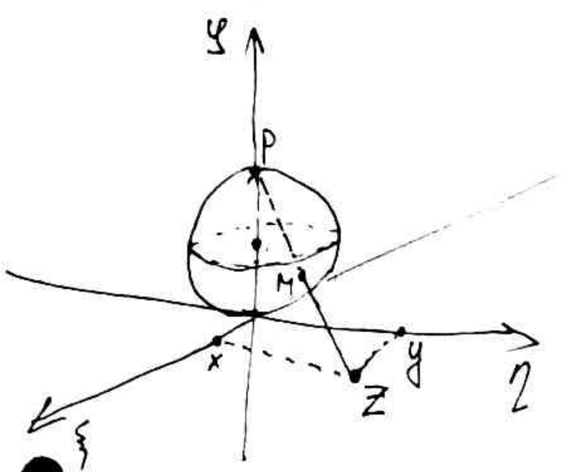
Если $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, то можно представить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - <u>тригонометр. запись</u>.

<u>Ф-ла Муавра</u>: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

$$\boxed{\begin{gathered} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ \text{- формула Эйлера} \\ \Rightarrow z^n = r^n e^{i\varphi n} \end{gathered}}$$

- Расширенной комплексной плоскостью наз-ся мн-во $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, где ∞ – бесконечно удаленная точка

Рассмотрим трехмерное пр-во с осями ξ, η, ζ.



- Сферу с центром в т. $O = (0, 0, \frac{1}{2})$ и радиусом $\frac{1}{2}$ назовём сферой Римана, а точку её пересеч. с осью ζ – полюсом сф. Римана $P = (0,0,1)$

▸ Ур-е сферы Римана:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta$$

- Отложим в плоскости „$\xi\eta$" точку $z = x + iy$; Пусть отрезок Pz пересекает сферу Римана в точке M. Тогда назовём M стереографической проекцией z.

▸ Если сопоставить бесконечно удал. точку ∞ точке P, стереографическая проекция явл. взаимно-однозначным отображением сферы Римана и $\overline{\mathbb{C}}$

$\sqsupset$] $\overrightarrow{PM} = (\xi, \eta, \zeta - 1)$; $\overrightarrow{PZ} = (x, y, -1)$

$$\overrightarrow{PM} \parallel \overrightarrow{PZ} \Rightarrow \frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1} := \alpha \Rightarrow \xi = \alpha x, \; \eta = \alpha y, \; \zeta - 1 = -\alpha$$

Подставим ξ, η, ζ в ур-е сферы:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta$$

$$\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + (1 - \alpha)^2 = 1 - \alpha$$

$$\alpha^2 (x^2 + y^2) + 1 - 2\alpha + \alpha^2 = 1 - \alpha$$

$$\alpha^2 (1 + x^2 + y^2) = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{1 + |z|^2} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \dfrac{x}{1 + |z|^2} \\ \eta = \dfrac{y}{1 + |z|^2} \\ \zeta = 1 - \dfrac{1}{1 + |z|^2} = \dfrac{|z|^2}{1 + |z|^2} \end{cases}$$

$\blacksquare$

- P.S. образ прямой и окр-ти на сфере Римана – окр-ть, причем образ прямой проходит через P (полюс сферы)

<u>Множества на комплексной пл-ти:</u>

$\rceil \{z_n\}$ - последов.-ть компл. чисел $(z_n \in \mathbb{C} \ \forall n \in \mathbb{N})$

• $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n \geq N \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon$

$\rceil \ z_0 = x_0 + iy_0, \ z_n = x_n + iy_n$

<u>Th</u> $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$

$\top$ $|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2} \leq |x_0 - x_n| + |y_0 - y_n|$

и $\sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2} \geq |x_0 - x_n|$

$\sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2} \geq |y_0 - y_n|$

$\left.\begin{matrix} |x_0 - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |y_0 - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} |x_0 - x_n| < \varepsilon \\ |y_0 - y_n| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$ опр. lim

$\blacksquare$

Св-ва сход.-ся посл.-ти:

$\rceil \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0, \ \lim\limits_{n\to\infty} z_n' = z_0'$

$\top$ 1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (z_n + z_n') = z_0 + z_0'$

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (z_n z_n') = z_0 z_0'$

3) $z_0' \neq 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{z_n'} = \frac{z_0}{z_0'}$

$z_n' \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

• Мн-во E наз.-ся <u>ограниченным</u> if $\exists M > 0$ т.ч. $\forall z \in E \Rightarrow |z| < M$

• $\rceil E$ - бесконечное мн-во

т. z_0 наз-ся <u>предельной точкой</u> E if $\exists \{z_n\}$ т.ч. $z_n \in E, z_n \neq z_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

• <u>Замыканием</u> мн-ва E наз-ся минимальное мн-во $\overline{E}$ т.ч.

$E \subset \overline{E}$ и мн-во всех предельных точек E также принадлежит $\overline{E}$

- $E \subset \mathbb{C}$ – замкнутое мн-во if оно содержит все свои предельные точки
- z_0 наз. внутренней точкой мн-ва E if $\exists \varepsilon > 0$ т.ч. $U_\varepsilon(z_0) \subset E$
- $O \subset \mathbb{C}$ – открытое мн-во if $\forall z \in O$ – внутр. точка
- Дополнением мн-ва E до компл. пл-ти наз.-ся мн-во

$$CE = \mathbb{C} / E$$

▸ $\exists$ $\{F_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ – замкн. мн-ва; $\{O_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ – открытые мн-ва

T $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ – замкн. мн-ва

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} O_i$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} O_i$ – открытые мн.-ва

P.S. 1) $\mathbb{C}$ и $\varnothing$ являются одновременно замкнутыми и открытыми

- Если на мн.-ве заданы понятия открытого и замкнутого мн-ва, причём выполняются вышеперечисл. св-ва, то говорят, что на этом мн-ве задана топология, а само мн-во наз. топологическим пр-вом

P.S. 2) $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$ – разные тополог. пр-ва; $\mathbb{C}$ не явл. замкн. в $\overline{\mathbb{C}}$

- $E \subset \mathbb{C}$ наз. компактом if E – огран. и замкн. мн-во
- $\exists \{O\}$ – система открытых мн-в

Говорят, что $\{O\}$ покрывает мн-во E if

$$\forall z_0 \in E \quad \exists O_{z_0} \in \{O\} \text{ т.ч. } z_0 \in O_{z_0}$$

- $E \subset \mathbb{C}$ наз. связным if $\forall E_1, E_2$ т.ч. $E_1 \cup E_2 = E$:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \neq \varnothing \\ E_2 \neq \varnothing \\ E_1 \cap E_2 = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} E_1 \cap \overline{E}_2 \neq \varnothing \\ \overline{E}_1 \cap E_2 \neq \varnothing \end{array}\right.$$

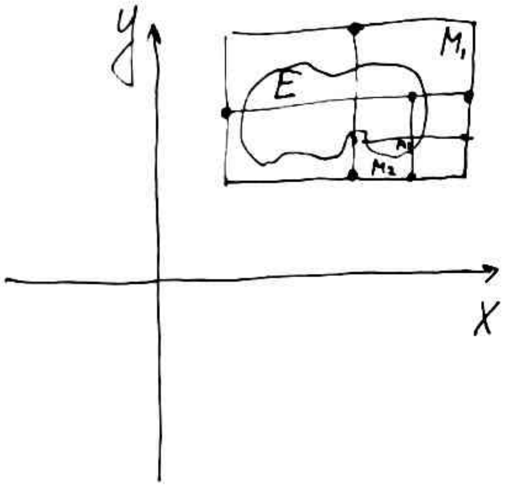
- $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ наз. областью if $\mathcal{D}$ – связное и открытое мн-во
- Границей мн-ва $E \subset \mathbb{C}$ наз. мн-во ∂E т.ч.

$$\forall z_0 \in \partial E \quad \forall \varepsilon \quad \exists z_1 \neq z_0, z_2 \neq z_0 : \ z_1, z_2 \in U_\varepsilon(z_0)$$
$$z_1 \in E, \ z_2 \in CE$$

Th. (Лемма Гейне – Бореля)

if E – компакт, то из $\forall$ бесконечной системы откр. мн-в $\{O\}$, покрывающих E, можно выделить конечное подпокрытие E

$\rceil$ $\exists\,\{O\}$ – бескон. система откр. мн-в, покрыв. E, из которой нельзя выделить конечного подпокрытия. Т.к. E – компакт, оно ограничено и $\exists\, M_1$ – прямоугольник со сторонами, параллельными осям т.ч. $E \subset M_1$.



Разделим M_1 на 4 равных пр.-ка. Среди них найдётся как минимум один ~~пр.~~ M_2 т.ч. $E \cap M_2$ не допускает конечного подпокр. откр. мн-ми.

$E \cap M_2$ – замкн. мн-во;

аналогично найдётся пр. M_3 т.ч. $E \cap M_3$ не допускает конечного подпокр.

Продолжая таким образом, получим посл.-ть прям.-ков $\{M_n\}$, вложенных друг в друга.

$M_{n+1} \subset M_n \Rightarrow$ размеры M_n убыв. $\Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n = z_0$ (точка)

Т.к. E – замкн., $z_0 \in E$ и $\exists\, O_{z_0} \in \{O\}$ т.ч. $z_0 \in O_{z_0}$

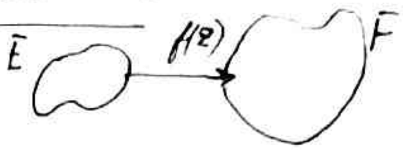
Т.к. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n = z_0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ т.ч. $M_N \subset O_{z_0}$

$z_0 \in O_{z_0} \Rightarrow (E \cap M_N) \subset M_N \subset O_{z_0}$

но M_N не допуск. подпокр. кон. числом откр. мн-в (?!)

∎

Лекция 2. Функции комплексного переменного



- $\exists\, E \subset \mathbb{C},\ F \subset \mathbb{C}$

Отображение $f: E \to F$ наз. ф-й компл. переменного

- $\exists$ на мн.-ве E задана ф-я $f(z): E \to F$

E наз.-ся областью определения $f(z)$ if $\forall z \in E\ \exists w \in F$ т.ч. $f(z) = w$

F наз.-ся множеством значений $f(z)$ if $\forall w \in F\ \exists z \in E$ т.ч. $f(z) = w$

- if $\forall z \in E\ \exists!\, w \in F$ т.ч. $f(z) = w \Rightarrow f(z)$ наз.-ся однозначной, иначе - многозначной

- $f(z)$ - однолистная if $E \leftrightarrow F$ - взаимно-однозначное отображение с помощью $f(z)$

Ex. $f(z) = z^n,\ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$ - однозначная

$$f(z) = \sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right)\right),\quad z \in \mathbb{C},\ k = 0, \dots, n-1$$

$n \in \mathbb{N}, n > 1$ - неоднозначная

т.о. $f(z) = z^n,\ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}, n > 1$ не явл. однолистной

НО: if $E = \{z : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\} \Rightarrow f(z) = z^n$ - однолистна

- $\exists\, E \subset \mathbb{C}$, z_0 - предельная точка мн-ва E

$\exists$ задана ф-ция $f(z)$ на E; w_0 наз. пределом $f(z)$ при $z \to z_0$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ т.ч. } \forall z \in E : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

Th $\exists\, z = x + iy,\ f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z_0 = x_0 + iy_0,\ w_0 = a + ib$

T?
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \begin{cases} \exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a \\ \exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b \end{cases}$$

$\square$
$$|f(z) - w_0| = \sqrt{(u(x,y) - a)^2 + (v(x,y) - b)^2} \Rightarrow \begin{cases} |f(z) - w_0| \geq |u(x,y) - a| \\ |f(z) - w_0| \geq |v(x,y) - b| \\ |f(z) - w_0| \leq |u(x,y) - a| + |v(x,y) - b| \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} |u(x,y) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |v(x,y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} |x_0 - x_n| < \varepsilon \\ |y_0 - y_n| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \text{опр. } \lim$$

▸ $\rceil \exists \lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$, $\exists \lim_{z\to z_0} g(z) = w_0'$, $z \in E$

T→ 1) $\exists \lim_{z\to z_0} (f(z)+g(z)) = w_0+w_0'$

2) $\exists \lim_{z\to z_0} (f(z)\cdot g(z)) = w_0 w_0'$

3) $\left.\begin{array}{l} w_0' \neq 0 \\ g(z)\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{w_0'}$

$\rfloor$ следует из аналог. утв. для действ. ф-ций неск. перем. ■

• $\rceil E \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in E$, причем z_0 - предельная точка E

$f(z)$ наз. <u>непрерывной в z_0</u> if $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

▸ <u>Th</u> $f(z)$ непр. в $z_0 \Leftrightarrow u(x,y)$ и $v(x,y)$ непр. в (x_0,y_0)

Обозначение: $f(z)$ непр. в $\forall z \in E \Leftrightarrow f(z) \in C(E)$

• $f(z)$ наз. <u>равномерно-непрерывной</u> на мн-ве E if

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0$ т.ч. $\forall z_1, z_2 \in E: |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$

▸ $\rceil E$ - компакт; $f(z) \in C(E)$

T→ 1) $|f(z)|$ огр. на E

2) $|f(z)|$ достигает свои верхн. и нижн. грани на E

3) (Th. Кантора) $f(z)$ равном.-непр. на E

• $\rceil E \subset \mathbb{C}$, $z \in E$, $z_0 \in E$ и $\exists \varepsilon > 0$ т.ч. $U_\varepsilon(z_0) \in E$;

говорят, что $f(z)$ имеет в z_0 <u>производную</u> $f'(z_0)$ if

$\exists \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} := f'(z_0)$

Обозначим $\Delta z = z - z_0$; $\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = y - y_0$; $z = x+iy$; $z_0 = x_0 + iy_0$; $\Delta f = f(z) - f(z_0)$

T→ $f'(z_0) := \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

• $f(z)$ наз. дифференцируемой в т. z_0 if

$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \bar{o}(1)\Delta z$, $\bar{o}(1) \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$

▸ $\exists\, f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$; $\exists\, \Delta u := u(x,y)-u(x_0,y_0)$; $\Delta v := v(x,y)-v(x_0,y_0)$

$f(z)$ – дифф.-ма в $z_0 \Leftrightarrow \Delta f = f'(z_0)\Delta z + \bar{o}(1)\Delta z$

$\exists\, f'(z_0)=a+ib$; $\exists\, \bar{o}(1)=\bar{o}_1(1)+i\bar{o}_2(1)$ т.ч. $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\bar{o}_1(1)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\bar{o}_2(1)=0$

Т> $\Delta f=\Delta u+i\Delta v=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+[\bar{o}_1(1)+i\bar{o}_2(1)]\cdot(\Delta x+i\Delta y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \bar{o}_1(1)\Delta x - \bar{o}_2(1)\Delta y \Leftrightarrow u(x,y) \text{ дифф. в } (x_0,y_0), \begin{cases}u'_x(x_0,y_0)=a\\ u'_y(x_0,y_0)=-b\end{cases}\\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \bar{o}_1(1)\Delta y + \bar{o}_2(1)\Delta x \Leftrightarrow v(x,y) \text{ дифф. в } (x_0,y_0), \begin{cases}v'_x(x_0,y_0)=b\\ v'_y(x_0,y_0)=a\end{cases}\end{cases}$

Получаем: $f(z)$ дифф.-ма в $z_0 \Rightarrow \begin{cases}u'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0)\\ u'_y(x_0,y_0)=-v'_x(x_0,y_0)\end{cases}$

• Эти условия наз. <u>условиями Даламбера-Эйлера</u> или <u>условиями Коши-Римана</u>

▸ <u>Th</u> Для того, чтобы $f(z)$ была дифф.-й в z_0 необх. и достаточно, чтобы её действ. и мнимые части были дифф.-мы в (x_0,y_0) как ф-ции 2х переменных, и выполнялись условия Коши-Римана.

I (необх.): доказана выше

(дост.): $\exists\, f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$, $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифф. в (x_0,y_0) и выполняются условия К.-Р.: $\begin{cases}u'_x(x_0,y_0)=v'_y(x_0,y_0)=a\\ u'_y(x_0,y_0)=-v'_x(x_0,y_0)=-b\end{cases}$

Т> $\begin{cases}\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \bar{o}_1(1)\Delta x + \bar{o}_2(1)\Delta y\\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \bar{o}_3(1)\Delta x + \bar{o}_4(1)\Delta y\end{cases}$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\bar{o}_i(1)=0$; $i=1,\dots,4$

$\Delta f=\Delta u+i\Delta v = a\Delta x - b\Delta y + \bar{o}_1(1)\Delta x + \bar{o}_2(1)\Delta y + ib\Delta x + ia\Delta y + i\bar{o}_3(1)\Delta x + i\bar{o}_4(1)\Delta y =$

$= \Delta x(a+ib) + \Delta y(-b+ia) + \bar{o}_1(1)\Delta x + \bar{o}_2(1)\Delta y + i\bar{o}_3(1)\Delta x + i\bar{o}_4(1)\Delta y =$

$= \Delta x(a+ib) + i\Delta y(a+ib) + (\bar{o}_1(1)+i\bar{o}_3(1))\Delta x + (\bar{o}_2(1)+i\bar{o}_4(1))\Delta y = (\Delta x+i\Delta y)(a+ib) + \dots$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x+i\Delta y} = a+ib + (\bar{o}_1(1)+i\bar{o}_3(1))\dfrac{\Delta x}{\Delta z} + (\bar{o}_2(1)+i\bar{o}_4(1))\dfrac{\Delta y}{\Delta z}$;

$\left|\dfrac{\Delta x}{\Delta z}\right|\le 1$ и $\left|\dfrac{\Delta y}{\Delta z}\right|\le 1 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = a+ib = u'_x(x_0,y_0)+iv'_x(x_0,y_0) = f'(z_0) \Rightarrow \blacksquare$

Ex. 1 $f(z) = e^z := e^x(\cos y + i\sin y)$, $\exists f(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$

$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y$; $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = e^x \sin y$;

$$\begin{cases} u'_x = e^x \cos y = v'_y \\ u'_y = -e^x \sin y = -v'_x \end{cases} \Rightarrow \text{вып. усл. К.-Р.} \Rightarrow e^z \text{ дифф.-ма в } \mathbb{C}$$

$$(e^z)' = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

Ex. 2 $f(z) = \sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\exists f(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$$

$$e^{-iz} = e^{y}(\cos x - i\sin x)$$

$$\sin z = \frac{e^{-y}\cos x - e^{y}\cos x + i(e^{-y}\sin x + e^{y} i \sin x)}{2i}$$

аналогично: $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow (\sin z)' = \cos z$

$\exists$ $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, и $\exists\ u'_x(x,y), v'_x(x,y), u'_y(x,y), v'_y(x,y) \in C(x_0,y_0)$ и выполн. усл. К.-Р.

T $f'(z) \in C(z_0)$, $z_0 = x_0 + iy_0$

- $\exists\ \mathcal{D}$ – область, $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathcal{D}\ \exists f(z)$

$f(z)$ наз. <u>аналитической</u> на $\mathcal{D}$ if $\forall z \in \mathcal{D}\ \exists f'(z)$ и $f'(z) \in C(\mathcal{D})$

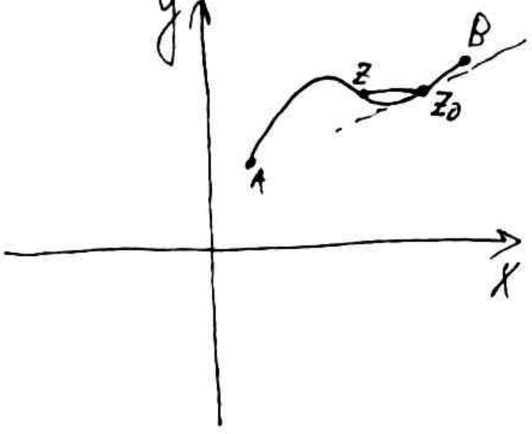
Обозначение: $f(z) \in A(\mathcal{D})$; $A(\mathcal{D})$ – класс аналит. ф-ций

<u>Ex.</u> $e^z \in A(\mathbb{C})$; $\sin z \in A(\mathbb{C})$; $\cos z \in A(\mathbb{C})$;

- $f(x)$ наз. <u>целой</u> if $f(x) \in A$

<u>P.S.</u> · иногда, в т.ч. в курсе мехмата, для аналитичности не требуют непр.-ти производной

Геометрический смысл производной:



] $\exists f'(z_0) \neq 0$

] в компл. плоскости параметрически задана спрямляемая дуга $\breve{AB}$:

$z = x + iy;\ x = x(t),\ y = y(t);\ t \in [\alpha, \beta]$

] $\lambda(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [\alpha, \beta]$

$\exists \lambda'(t_0) \neq 0;\ z_0 = \lambda(t_0);\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = \lambda'(t_0) \neq 0$

$T' \ \Delta z \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0;\ \exists \arg \lambda'(t_0)$ – угол между кас. к z_0 и полож. напр. оси Ox

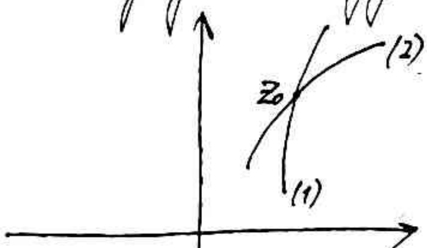
---

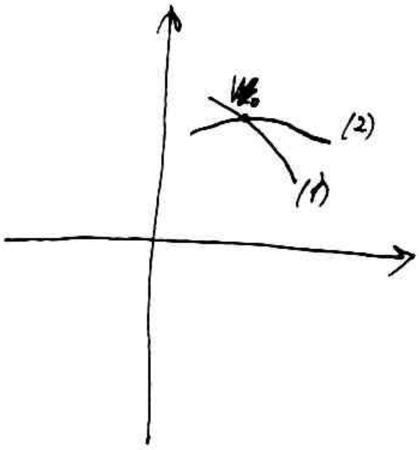
] на компл. пл-ти парам.-ки заданы 2 дуги:

(1): $z = \lambda(t),\ \lambda'(t_0) \neq 0$

(2): $z = \mu(t),\ \mu'(t_1) \neq 0$

причём $\lambda(t_0) = \mu(t_1) = z_0$





if $f(z)$ переводит (1) в (1'), (2) в (2'), $f'(z_0) \neq 0$

и $w_0 = f(z_0)$, то угол между кас. к дугам сохраняется

] $\left.(f(\lambda(t)))' = f'(z) \cdot \lambda'(t)\right|_{\substack{z=z_0 \\ t=t_0}}$

$\left.(f(\mu(t)))' = f'(z) \cdot \mu'(t)\right|_{\substack{z=z_0 \\ t=t_1}}$

$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Arg}[f(\lambda(t))]' = \operatorname{Arg} f'(z) + \operatorname{Arg} \lambda'(t), & z = z_0,\ t = t_0 \\ \operatorname{Arg}[f(\mu(t))]' = \operatorname{Arg} f'(z) + \operatorname{Arg} \mu'(t), & z = z_0,\ t = t_1 \end{cases} \Rightarrow$

т.к. $\begin{cases} z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \end{cases} \Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

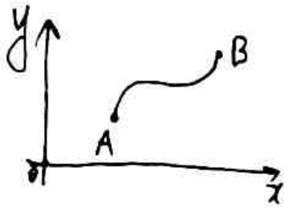
$\Rightarrow$ углы равны как разности аргументов. ■

- Отображение наз. конформным if оно сохр. углы между кас. кривых

Получаем: $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f(z)$ даёт конформн. отобр. в z_0

if $\mathcal{D}$ – область, $f'(z) \neq 0\ \forall z \in \mathcal{D} \Rightarrow f(z)$ – конформн. отобр. на свой образ

Лекция 3. Интегрирование ф-ций комплексного переменного. Теорема Коши



] $\breve{AB}$ - спрямляемая дуга в пл.-ти "xy"

] $z=x+iy$ и] $\exists f(z)$ $\forall z \in \breve{AB}$

] точки $z_1, \dots, z_{n-1}$ разбивают дугу AB на поддуги $\widetilde{z_{j-1,j}}$
$A=z_0$, $B=z_n$

и на каждой дуге выбрана точка $\tilde{z}_j \in \widetilde{z_{j-1,j}}$;] $l(\widetilde{z_{j-1,j}})$ - длина дуги

- число $\Delta := \max\limits_{j=1..n} |z_{j-1} - z_j|$ назовём диаметром разбиения

- if $\exists \lim\limits_{\Delta \to 0} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} f(\tilde{z}_j)\, l(\widetilde{z_{j-1,j}}) \right)$, не зависящий от способа разбиения $\breve{AB}$ на поддуги и выбора точек $\tilde{z}_j$, то этот предел называют криволинейным интегралом I рода и обозначают $\int\limits_{AB} f(z)|dz|$

- if $\exists \lim\limits_{\Delta \to 0} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} f(\tilde{z}_j)(z_j - z_{j-1}) \right)$, не зависящий от способа разбиения $\breve{AB}$ на поддуги и выбора точек $\tilde{z}_j$, то этот предел называют криволинейным интегралом II рода и обозначают $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$

Связь между действ. и компл. интегралами:

] $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$; $z=x+iy$; $z_j=x_j+iy_j$; $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$; $\left.\begin{aligned}\Delta x_j &= x_j - x_{j-1};\\ \Delta y_j &= y_j - y_{j-1};\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta z_j = \Delta x_j + i\Delta y_j$

$\tilde{z}_j = \tilde{x}_j + i\tilde{y}_j$

Т° $\sum\limits_{j=1}^{n} f(\tilde{z}_j)(z_j - z_{j-1}) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left[u(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) + i v(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) \right] (\Delta x_j + i\Delta y_j) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(u(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)\Delta x_j - v(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)\Delta y_j \right) + i \sum_{j=1}^{n} \left(v(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)\Delta x_j + u(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)\Delta y_j \right)$$

Таким образом, $\exists \int\limits_{AB} f(z)\,dz \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{AB} \left(u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy \right) + i \int\limits_{AB} \left(u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx \right)$$

Классы интегрируемых ф-й

▸ Необх. условие интегрируемости $f(z)$ — ограниченность $|f(z)|$

1) $f(z) \in C(\breve{AB})$ => интегр.-ма

2) $|f(z)|$ огр. и $f(z)$ имеет конечное число точек разрыва на $\breve{AB}$ => $f(z)$ инт.-ма

3) $|f(z)|$ огр., $f(z)$ обладает I-свойством => $f(z)$ инт.-ма

• $f(z)$ <u>обладает I-свойством</u> на $\breve{AB}$ if

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ конечное число поддуг $\breve{AB}$, содерж. все точки разрыва $f(z)$, суммарная длина которых $\leq \varepsilon$

Св-ва интегр.-мых ф-ций

$\exists \exists \int\limits_{AB} f(z)dz$, $\exists \int\limits_{AB} g(z)dz$

T:

1) $\exists \int\limits_{AB} (\alpha f + \beta g)dz = \alpha \int\limits_{AB} f(z)dz + \beta \int\limits_{AB} g(z)dz \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ — линейное св-во

2) $\left.\begin{matrix} \breve{AB} = \breve{AC} \cup \breve{CB} \\ \breve{AC} \cap \breve{CB} = \{C\} \end{matrix}\right\}$ => if $\exists \int\limits_{AB} f(z)dz$ => $\exists \int\limits_{AC} f(z)dz$, $\exists \int\limits_{CB} f(z)dz$

и $\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AC} f(z)dz + \int\limits_{CB} f(z)dz$ — аддитивное св-во

3) $|f(z)| \leq M$ => $\left|\int\limits_{AB} f(z)dz\right| \leq M \cdot l(\breve{AB})$

4) $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\int\limits_{BA} f(z)dz$

$\exists \exists \int\limits_{AB} f(z)dz$ и $\exists$ $\lambda(t)$ — параметризация $\breve{AB}$ $(x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta])$, причем $\breve{AB}$ — гладкая или кусочно-гладкая.

T $\lambda'(t) \neq 0$ => $\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\lambda(t))\lambda'(t)dt$

$$\int\limits_{AB} f(z)|dz| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\lambda(t))|\lambda'(t)|dt$$

• область $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ – <u>односвязная</u> if граница ∂D – замкнутое и связное множество

• область $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ – <u>n-связная</u> или <u>многосвязная</u> if ∂D состоит из n связных непересекающихся компонент

• кривая $\overset{\frown}{AB}$ – <u>жорданова</u>, if $\exists\, \lambda(t) = x(t) + iy(t) \in C\,[\alpha;\beta]$ взаимно-однозначное отобр. $[\alpha,\beta]$ на $\overset{\frown}{AB}$

• if, к тому же, $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$, то $\overset{\frown}{AB}$ наз. <u>замкнутой</u>

▶ <u>Th. (Жордана)</u>

Замкнутая жорданова кривая Γ разбивает $\overline{\mathbb{C}}$ на 2 области: $D_\Gamma := \operatorname{int}\Gamma$ – ограниченную, и $\overline{\mathbb{C}}/D_\Gamma$ – неогр., $\infty \in (\overline{\mathbb{C}}/D_\Gamma)$, причём Γ – граница обеих областей.

▶ (следствие) if замкнутая кривая Γ лежит в односвязной огран. области D, то $D_\Gamma = \operatorname{int}\Gamma \subset D$

• замкнутую, кусочно-гладкую жорданову кривую будем называть <u>контуром</u>

• <u>положительным направлением обхода</u> границы ∂D назовём обход, при котором $\mathcal{D}$ остаётся слева:

▶ <u>Th. (интегральная теорема Коши)</u>

$f(z) \in A(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}$ – односвязн. область $\Rightarrow$ $\forall$ контура $\Gamma \subset \mathcal{D}$: $\int_\Gamma f(z)\,dz \equiv 0$

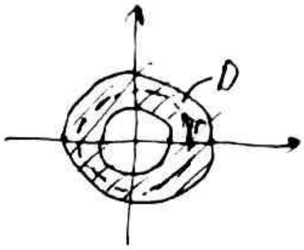
$\rceil$ $f(z) \in A(\mathcal{D}) \Rightarrow \exists \int_\Gamma f(z)\,dz$; $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\Gamma (u\,dy + v\,dx) \overset{\text{ф. Грина}}{=\!=} \iint_{\mathcal{D}_\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-v) - \frac{\partial}{\partial y}(u)\right] dx\,dy +$$

$$+ i\iint_{\mathcal{D}_\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x}(u) - \frac{\partial}{\partial y}(v)\right] dx\,dy = 0$$

т.к. $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непр., дифф-мы и по усл. Коши-Римана $u'_x - v'_y = u'_y + v'_x = 0$

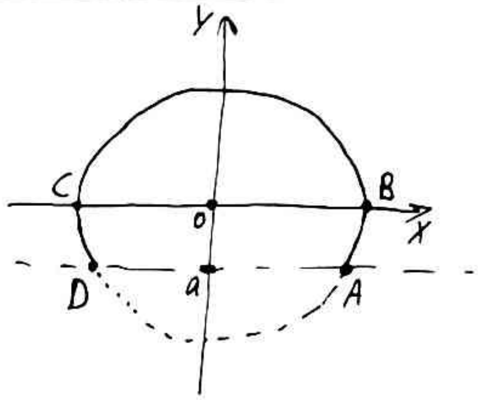
Ex. $f(z)=\frac{1}{z}$, $1<|z|<2$; $\Gamma=\{z \mid |z|=\frac{3}{2}\}$



$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{z}=\left\{\begin{array}{l} z=\frac{3}{2}e^{i\varphi},\ \varphi\in[0;2\pi] \\ dz=\frac{3}{2}ie^{i\varphi}d\varphi \end{array}\right\}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}e^{-i\varphi}\cdot\frac{3}{2}\cdot i\cdot e^{i\varphi}d\varphi=2\pi i\neq 0$$ (обл. не односвязная)

Лемма Жордана



$\exists\ D=\{z \mid \operatorname{Im} z>a\}$

$C_R=\{z \mid |z|=R;\ \operatorname{Im} z>a\}$

$\exists\ f(z)\in C(\{z \mid \operatorname{Im} z>a;\ |z|\geq R_0>0)$; $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in D}} f(z)=0$

$\Gamma\ \lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\cdot e^{i\cdot m\cdot z}dz=0$, $m>0$

$\exists$ 1) $z\in AB \Rightarrow z=Re^{i\varphi}$, $\varphi\in[\varphi_0;0]$; $dz=Re^{i\varphi}\cdot id\varphi$; $|dz|=Rd\varphi$

$$|e^{i\cdot mz}|=e^{Re(i\cdot m\cdot R\cdot e^{i\varphi})}=e^{Re(i\cdot m\cdot R(\cos\varphi+i\sin\varphi))}=e^{-mR\sin\varphi}$$

$$\left|\int_{AB} f(z)e^{i\cdot m\cdot z}dz\right|\leq\max_{z\in AB}|f(z)|\cdot\int_{\varphi_0}^{0}e^{-mR\sin\varphi}\cdot Rd\varphi\leq C\cdot\max_{z\in AB}|f(z)|\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

т.к. $f(z)\xrightarrow[z\to\infty]{}0$

2) аналогично для случая $z\in CD$

3) $z\in BC$

$$\left|\int_{BC} f(z)e^{i\cdot mz}dz\right|\leq\max_{z\in BC}|f(z)|\int_{BC}|e^{imz}||dz|\leq\max_{z\in BC}|f(z)|\cdot\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\varphi}\cdot Rd\varphi\leq$$

$0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2}{\pi}\varphi\leq\sin\varphi\leq\varphi$

$$\leq 2\max_{z\in BC}|f(z)|\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-mR\frac{2}{\pi}\varphi}Rd\varphi=2\cdot\max_{z\in BC}|f(z)|\cdot\left.\frac{e^{-mR\cdot\frac{2}{\pi}\varphi}\cdot R}{-mR\cdot\frac{2}{\pi}}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=C_1\cdot\max_{z\in BC}|f(z)|\cdot(-\underbrace{e^{-mR}}_{R\to+\infty\ 0}+1)\xrightarrow[R\to+\infty]{}0$$

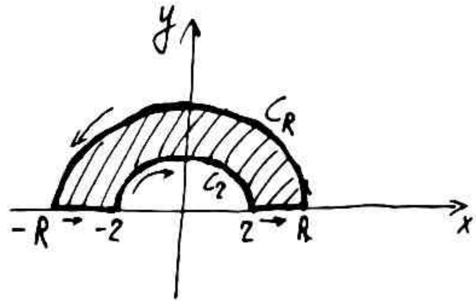
■

Лекция 4. Интегральная ф-ла Коши; интеграл Коши

Ex. Вычислим интеграл Дирихле с помощью леммы Жордана и интегр. Th. Коши:

▶ $$\mathcal{I} := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{\substack{r\to 0+\\ R\to+\infty}} \left(\int_{-R}^{-r} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx \right)$$



Рассм. $f(z) := \frac{1}{z}$, $f(z) \in A(\mathbb{C}\setminus\{0\})$

$$\int_{\Gamma_{R,r}} f(z) e^{iz}\,dz = \int_{\Gamma_{R,r}} \frac{e^{iz}dz}{z} = 0 =$$

$$= \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}dx}{x} + \int_{C_r} \frac{e^{iz}dz}{z} + \int_r^R \frac{e^{ix}dx}{x} + \int_{C_R} \frac{e^{iz}dz}{z}$$

$$0 = \lim_{\substack{r\to 0+\\ R\to+\infty}} \left(\int_{-R}^{-r} \frac{\cos x + i\sin x}{x}\,dx + \int_{C_r} \frac{e^{iz}dz}{z} + \int_r^R \frac{\cos x + i \sin x}{x}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}dz}{z} \right) =$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0+\\ R\to+\infty}} \left(2i \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx \right) + \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}dz}{z} + \lim_{r\to 0+} \int_{C_r} \frac{e^{iz}dz}{z};$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}dz}{z} \underset{\text{(л. Жордана)}}{=} 0; \quad \int_{C_r} \frac{e^{iz}dz}{z} = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{ire^{i\varphi}} \cdot r i e^{i\varphi}}{r e^{i\varphi}}\,d\varphi = i\int_{\pi}^{0} e^{ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= i\int_{\pi}^{0} e^{-r\sin\varphi} e^{ir\cos\varphi}\,d\varphi = i\int_{\pi}^{0} \underbrace{e^{-r\sin\varphi}}_{\xrightarrow[r\to 0+]{} 1} \underbrace{\cos(r\cos\varphi)}_{\xrightarrow[r\to 0+]{} 1}\,d\varphi - \int_{\pi}^{0} \underbrace{e^{-r\sin\varphi}}_{\xrightarrow[r\to 0+]{} 1} \underbrace{\sin(r\cos\varphi)}_{\xrightarrow[r\to 0+]{} 0}\,d\varphi \xrightarrow[r\to 0+]{} -i\int_0^{\pi} d\varphi$$

$$0 = 2i\mathcal{I} - i\int_0^{\pi} d\varphi; \quad \mathcal{I} = \frac{\pi}{2}$$

■

Следствия из интегральной Th. Коши:

1) $\exists\ \mathcal{D}$ – односвязная огр.-ная область; граница $\mathcal{D}$ - $\partial\mathcal{D}$ - контур

T $f(z) \in A(\overline{\mathcal{D}}) \Rightarrow \int\limits_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz = 0$

2) -||-

T $f(z) \in A(\mathcal{D}) \cap C(\overline{\mathcal{D}}) \Rightarrow \int\limits_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz = 0$

3) $\exists\ \mathcal{D}$ – конечно-связная огр. область; $\partial D = \Gamma \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} \gamma_i$, $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$ if $i \neq j$, $\gamma_i \subset \operatorname{int}\Gamma\ \forall i = 1..n$

T $f(z) \in A(\overline{\mathcal{D}}) \Rightarrow \int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{\gamma_i} f(z)dz$

(док-во через „разрезы": см. рисунок)

4) -||-

T $f(z) \in A(\mathcal{D}) \cap C(\overline{\mathcal{D}}) = \int\limits_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz = 0$

(без док-ва)

Интегральная ф-ла Коши

$\exists\ f(z) \in A(D)$, $\Gamma \subset D$ – контур, $\operatorname{int}\Gamma \subset D$

T $z \in \operatorname{int}\Gamma := D_\Gamma \Rightarrow \underbrace{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}}$ – интегр. ф-ла Коши

причём $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} f(z), & z \in \operatorname{int}\Gamma \\ 0, & z \notin \operatorname{int}\Gamma \end{cases}$ ($z \notin \operatorname{int}\Gamma \Rightarrow \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \in A(\Gamma) \Rightarrow \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$ по инт. Th. Коши)

следствие: $f(z) = 0\ \forall z \in \Gamma \Rightarrow f(z) \equiv 0\ \forall z \in \operatorname{int}\Gamma$

$\sqsupset$ $\exists\, \varepsilon$ т.ч. $\overline{U_\varepsilon(z)} \subset D_\Gamma$; $D_{\Gamma,\varepsilon} := D_\Gamma \setminus U_\varepsilon(z)$

$$\int\limits_{\partial D_{\Gamma,\varepsilon}} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = 0 \quad \text{т.к. } \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \in A(D_{\Gamma,\varepsilon}) \Rightarrow \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \int\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} =$$

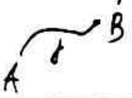
$$= \left\{ \begin{matrix} \xi - z = \varepsilon \cdot e^{i\varphi} \\ \varphi \in [0; 2\pi] \end{matrix} \right\} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{i\varphi}) \cdot \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = i \int\limits_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\varphi})\, d\varphi ;$$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = i \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\varphi})\, d\varphi \overset{*}{=} i f(z) \cdot 2\pi$$

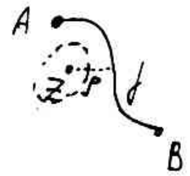
P.S. Предельный переход * обосновывается раздел. действ. и мнимых частей и Th. о пред. переходе действ. ИЗП

$\blacksquare$

- Интеграл типа Коши — интеграл $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$, $f(z) \in C(\overset{\frown}{AB})$, $z \notin \gamma$



Th. $\sqsupset$ $f(z) \in C(\gamma)$; $\sqsupset$ $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$



Т? $F(z) \in A(\mathbb{C} \setminus \gamma)$ и $\exists F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\sqsupset$ по индукции:

$n = 1$: $\exists\, \varepsilon > 0$ т.ч. $\overline{U_\varepsilon(z)} \cap \gamma = \varnothing$; $\sqsupset |\Delta z| < \varepsilon$; $\sqsupset \rho = \rho(\gamma, \overline{U}_\varepsilon(z)) > 0$

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\Delta z} \left(\frac{1}{\xi - (z + \Delta z)} - \frac{1}{\xi - z} \right) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z\, d\xi}{(\xi - (z + \Delta z))(\xi - z)}$$

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(\xi) \left(\frac{1}{(\xi - (z + \Delta z))(\xi - z)} - \frac{1}{(\xi - z)^2} \right) dz \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi) \left[\xi - z - (\xi - (z + \Delta z)) \right]}{(\xi - (z + \Delta z))(\xi - z)^2} d\xi \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)\, \Delta z\, d\xi}{(\xi - (z + \Delta z))(\xi - z)^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M |\Delta z|}{\rho^3} \cdot l \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0, \Rightarrow$$

l - длина γ

$$\Rightarrow \exists F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2} \Rightarrow \blacksquare$$

] известно для n: $\exists F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}$

Докажем для $n+1$: $\exists F^{(n+1)}(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+2}}$

$$\left|\frac{F^{(n)}(z+\Delta z)-F^{(n)}(z)}{\Delta z} - \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+2}}\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(\xi)\left(\frac{\frac{1}{(\xi-(z+\Delta z))^{n+1}}-\frac{1}{(\xi-z)^{n+1}}}{\Delta z}\right)d\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+2}}\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(\xi)\left[\frac{(\xi-z)^{n+1}-(\xi-(z+\Delta z))^{n+1}}{\Delta z(\xi-(z+\Delta z))^{n+1}(\xi-z)^{n+1}} - \frac{n+1}{(\xi-z)^{n+2}}\right]d\xi\right| =$$

$$= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(\xi)\frac{\left[(\xi-z)\left((\xi-z)^{n+1}-(\xi-(z+\Delta z))^{n+1}\right)-(n+1)\Delta z(\xi-(z+\Delta z))^{n+1}\right]}{\Delta z(\xi-(z+\Delta z))^{n+1}(\xi-z)^{n+2}}d\xi\right| =$$

$$= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(\xi)\frac{\left[(\Delta z)^2\cdot A(\xi, z, \Delta z)\right]d\xi}{\Delta z(\xi-(z+\Delta z))^{n+1}(\xi-z)^{n+2}}\right| \leq$$

$A(\xi, z, \Delta z)$ – многочлен фиксированной степени

$$\leq \frac{n!}{2\pi i}\frac{MB|\Delta z|}{\rho^{2n+3}} \xrightarrow[\Delta z\to 0]{} 0$$

■

► Следствие: $f(z)\in A(D) \Rightarrow f(z)$ дифф-ма бесконечно

Неопр. интеграл функции компл. переменного. Первообразная

] $\mathcal{D}$ - односвязн. обл., $z_0 \in \mathcal{D}, z \in \mathcal{D}$; $f(z) \in A(\mathcal{D})$

● Выраж. $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$ наз. неопределенным интегралом от $f(z)$

▶ $\exists F'(z)=f(z)$

] $\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\int\limits_z^{z+\Delta z}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\int\limits_z^{z+\Delta z}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\Delta z} - \frac{1}{\Delta z}\int\limits_z^{z+\Delta z} f(z)\,d\xi\right| =$

$= \left|\int\limits_z^{z+\Delta z}\frac{f(\xi)-f(z)}{\Delta z}\,d\xi\right| \le \max\limits_{\Delta z}|f(\xi)-f(z)|\cdot\frac{1}{|\Delta z|}\cdot|\Delta z| \xrightarrow[\Delta z\to 0]{} 0.$

■

● $\Phi(z)$ наз. <u>первообразной</u> $f(z)$ if $\exists \Phi'(z)=f(z)$

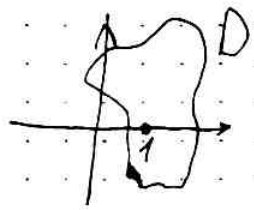
▶ $F(z)=\int\limits_{z_0}^z f(\xi)\,d\xi$ - первообразная $f(z)$;] $\Phi(z)$ - другая первообр.

T? $F(z)-\Phi(z)=C$

] $\Phi' - F' = 0 \Rightarrow \Phi(z)=F(z)+C$

▶ $F(z)=\int\limits_{z_0}^z f(\xi)\,d\xi = \Phi(z)-\Phi(z_0)$ - <u>ф-ла Ньютона-Лейбница</u>

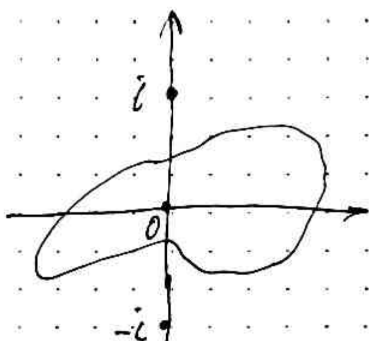
<u>Ex.1</u>] $z=0\notin\mathcal{D}$, $z=1\in\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$-односв., $f(z)=\frac{1}{z}\in A(\mathcal{D})$



● $\int\limits_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln z$; $(\ln z)'=\frac{1}{z}$; $\ln z = \ln|z| + i\arg z$

при $z=x>0$, $\int\limits_1^x\frac{d\xi}{\xi}=\ln x$

<u>Ex.2</u>] $\mathcal{D}$ - односв.; $0\in\mathcal{D}$; $\pm i\notin\mathcal{D}$



$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$

$\int\limits_0^z\frac{d\xi}{1+\xi^2} = \operatorname{arctg} z$; $(\operatorname{arctg} z)'=\frac{1}{1+z^2}$

при $z=x$, $\int\limits_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2}=\operatorname{arctg} x$.

●

Лекция 5. Гармоническая функция. Принцип максимума

Th. (Морера)

∃ D − односв., $f(z) \in C(D)$ и ∀ контура $\Gamma \subset D \Rightarrow \int\limits_\Gamma f(z)dz = 0$

Т $f(z) \in A(D)$

Д $F(z) := \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$; $\{z_0, z\} \in D$

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi - \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi}{\Delta z} - \frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\xi\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z} \frac{f(\xi) - f(z)}{\Delta z} d\xi\right| \leq \max_{\xi \in [z; z+\Delta z]} |f(\xi) - f(z)| \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists F'(z) = f(z) \in C(D)$

$F'(z) \in C(D) \Rightarrow F(z)$ − аналит. $\Leftrightarrow F(z) \in A(D) \Rightarrow f(z) \in A(D)$

■

] D − область, $\forall (x,y) \in D \ \exists u(x,y)$

- $u(x,y)$ наз. <u>гармонической</u> в D if
  1) $u(x,y)$ дважды непрерывно дифф-ма в D
  2) $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

- оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ наз-ся <u>оператором Лапласа</u>

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

▶ D − односв. обл., $f(z) \in A(D)$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow u(x,y)$ и $v(x,y)$ − гарм. в D

Д $f(z) \in A(D) \Rightarrow u(x,y)$ и $v(x,y)$ бесконечно дифф-мые ф-ции

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \text{(усл. К.-Р.)} \Rightarrow \begin{cases} u''_{xx} = v''_{yx} \\ u''_{yy} = -v''_{xy} \end{cases} \xrightarrow{v''_{yx} = v''_{xy}} u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \Rightarrow \Delta u = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u$ − гармоническая ф-я в D; v − аналогично

■

▶] $\mathcal{D}$ - односв. обл.; $u(x,y)$ - гарм. в $\mathcal{D}$ $\Rightarrow \exists f(z) \in A(\mathcal{D})$ т.ч. $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$

] $\quad V(x,y) := \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u'_y\,dx + u'_x\,dy$

●

$\Gamma \subset D$ - контур $\Rightarrow \int\limits_{\Gamma} -u'_y\,dx + u'_x\,dy = \iint\limits_{D_\Gamma}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u'_x) - \frac{\partial}{\partial y}(-u'_y)\right]dx\,dy \overset{\Delta u=0}{=} 0$

$dv = -u'_y\,dx + u'_x\,dy = v'_x\,dx + v'_y\,dy \iff \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$ - усл. Коши - Римана $\Rightarrow$

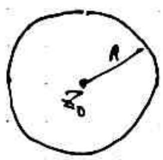
$\Rightarrow f(z) := u(x,y) + iv(x,y) \in A(\mathcal{D})$

■

▶ Ф-ла среднего значения

●] $f(z) \in A(\{z \mid |z-z_0| < R,\ R>0\})$

T $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})\,d\varphi$



] $f(z_0) \underset{0<r<R}{=\!=} \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=r}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z_0} = \left\{\begin{matrix}\xi - z_0 = re^{i\varphi} \\ \varphi\in[0;2\pi];\ d\xi = rie^{i\varphi}d\varphi\end{matrix}\right\} =$

$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\varphi})\,ri\,e^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi$

■

▶] $u(x,y)$ гармонична в $D = \{z \mid |z-z_0| < R\} \Rightarrow$

● $\Rightarrow \exists f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in A(D) \Rightarrow$

$u(x_0,y_0) = \{z_0 = x_0 + iy_0\} = \operatorname{Re} f(z_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi,\ y_0 + r\sin\varphi)\,d\varphi}$

- ф-ла среднего значения гармон. ф-ции

●

Th. (Принцип максимума модуля аналит.-кой ф-ции)

$\rceil f(z) \in A(D)$, D - область, $M = \sup\limits_{z \in D} |f(z)|$

$\top$ if $f(z) \not\equiv const$, $|f(z)| < M \quad \forall z \in D$

1) Для случаев $M = +\infty$ и $M = 0$ док-во очевидно

2) $\rceil 0 < M < +\infty$; $\rceil \exists z_0 \in D$ т.ч. $|f(z_0)| = M$ (док-во от противного)

$\rceil \rho = \rho(z_0, \partial D) > 0$ - расст. от z_0 до границы D

Покажем, что $|f(z)| = M$ в круге $|z - z_0| < \rho$: $\rceil 0 < r < \rho$

$\rceil \exists z_1$ т.ч. $|f(z_1)| < M$ и $z_1 \in \{|z - z_0| = r\}$

$\top$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi; \quad \rceil z_1 = z_0 + re^{i\varphi_1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ т.ч. $\forall z \in \{z \mid |z - z_0| = r;\ |z - z_1| \le \delta\}$: $|f(z)| < M$

в силу непр. $f(z)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\varphi_1 - \delta} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi + \int_{\varphi_1 - \delta}^{\varphi_1 + \delta} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi + \int_{\varphi_1 + \delta}^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi \right]$$

$|f(z_0)| = M < \frac{1}{2\pi} M \cdot 2\pi = M \Leftrightarrow M < M$ (?!)

получаем, что $|f(z)| = M$, $|z - z_0| = r \Rightarrow |f(z)| \equiv M$, $|z - z_0| < \rho$

3) Докажем для $\forall z \in D$. D - откр., связн. мн-во $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \overset{\frown}{z_0 z}$ - непр. кривая, соед. z и z_0

$\overset{\frown}{z_0 z}$ - компакт; $\rceil \delta$ - расст. от $\overset{\frown}{z_0 z}$ до ∂D

$\delta = \rho(\overset{\frown}{z_0 z}, \partial D) > 0$

Покроем $\overset{\frown}{z z_0}$ окр.-ми с радиусом $\frac{\delta}{3}$; по л. Гейне-Бореля $\exists$ конечное число кружков, покрыв. $\overset{\frown}{z_0 z}$

в круге $|z - \xi| < \frac{\delta}{3}$ $|f(\xi)| = M \Rightarrow |f(z)| = M \Rightarrow \forall z \in D \ |f(z)| \equiv M$

$|f(z)|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y) = M^2 \ne 0$

$$\begin{cases} 2u'_x u + 2vv'_x \equiv 0 \\ 2u'_y u + 2vv'_y = 0 \end{cases} \underset{К-Р}{\Rightarrow} \begin{cases} uu'_x - vu'_y \equiv 0 \\ uu'_y + vu'_x \equiv 0 \end{cases}; \quad u^2 + v^2 = M^2 > 0 \Rightarrow u'_x = u'_y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u(x,y) = const$

аналогично, $v(x,y) = const$; $f(z) \equiv const$ (?!)

Следствия:

1)] $f(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$, D - огран. область

T $\exists M := \max\limits_{z\in\overline{D}} |f(z)| \Rightarrow \max\limits_{z\in\overline{D}} |f(z)|$ достигается на границе D

2)] $f(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$, D - огран. область, $f(z) \neq 0$ if $z \in \overline{D}$

T $\exists m := \min\limits_{z\in\overline{D}} |f(z)| \Rightarrow \min\limits_{z\in\overline{D}} |f(z)|$ достигается на границе D

3)] $\{f(z), g(z)\} \in A(D) \cap C(\overline{D})$

T $f(z) = g(z),\ z \in \partial D \Rightarrow f(z) \equiv g(z)\ \forall z \in D$

Th. (принцип максимума гармонической ф-ции)

] $u(x,y)$ - гарм. в области D, $M := \sup\limits_{D} u(x,y)$, $m = \inf\limits_{D} u(x,y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall z \in D\quad m < u(x,y) < M$ if $u(x,y) \not\equiv const$

[: аналогично предыдущему (по ф. ср. знач.)

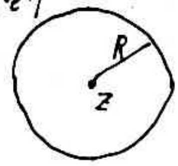
■

Th. (Лиувилля)

] $f(z) \in A(\mathbb{C})$ - целая, $|f(z)| \leq M|z|^{\alpha}$, $|z| \geq r_0 > 0$

T $f(z)$ - многочлен, степень которого не превосх. $\lfloor \alpha \rfloor$

] $z \in \mathbb{C}$ $\quad f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int_{|z-\xi|=R} \dfrac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}$; $\quad \xi = z + R\cdot e^{i\varphi}$; $|f(\xi)| \leq M|z + R\cdot e^{i\varphi}|^{\alpha}$



$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{2\pi R M (|z| + R)^{\alpha}}{R^{n+1}} = \frac{n! \left(\frac{|z|}{R} + 1\right)^{\alpha} M}{R^{n-\alpha}}$$

$n > \alpha \quad \left|f^{(n)}(z)\right| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(z)$ - многочлен степени не выше α

■

Лекция 6. Функциональные ряды

$\exists$ дана последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in \mathbb{C}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ <u>сходится</u> if $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$

▶ <u>Th.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сх-ся, $z_n = x_n + iy_n \iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сходятся

▶ <u>Th.</u> (Кр. Коши сх-ти ряда)

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сх-ся $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$ т.ч. $\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

$\exists$ задано мн-во $E \subset \mathbb{C}$; $\{f_n(z)\}$ - посл-ть ф-ций, опред. на E

- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится на E <u>поточечно</u> if $\{f_n(z)\}$ сх-ся в $\forall z \in E$
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ <u>сходится равномерно</u> на E
  if $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$ т.ч. $\forall n \geq N, \forall z \in E \Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right| < \varepsilon$

▶ <u>Th.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сх-ся равномерно на E, $f_n(z) = u_n(x,y) + iv_n(x,y) \iff$
$\iff \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y)$ сх. равномерно на $\{(x,y) \mid x+iy \in E\}$

$\exists \mathcal{D}$ - область, $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ <u>сх-ся равномерно внутри области</u> $\mathcal{D}$ if
  ряд сх-ся равномерно на $\forall$ компакте $K \subset \mathcal{D}$

<u>Ex.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ – сходится if $|z| < 1$

<u>на мн-ве</u> $\{z \mid |z| < 1\}$ нет равном. сходимости,
но есть <u>равном. сх-ть внутри этой области</u>

Равномерная сх-ть внутри области – более слабое условие, чем р-сх-ть на множестве.

Св-ва равном. сх-ти:

1) $] \exists \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \ \forall z \in E$, $f_n(z) \in C(E) \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ на E

T $f(z) \in C(E)$

2) $]$ Γ – кусочно-гладкая кривая Жордана

и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ на Γ

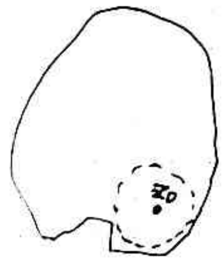
T if $\exists \int_\Gamma f_n(z)dz \ \forall n \Rightarrow \exists \int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Gamma f_n(z)dz$

Th. (I-ая Вейерштрасса)

$] \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сх-ся равном. внутри области D; $] f_n(z) \in A(D) \ \forall n \in \mathbb{N}$

T
1) $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \in A(D)$
2) $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \ \forall k \in \mathbb{N}$
3) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \rightrightarrows$ внутри D

I $\forall z_0 \in D$, $\exists r > 0$ т.ч. ~~$\overline{U_r(z_0)} \subset D$~~ $\overline{U_r(z_0)} \subset D$



по интег. ф-ле Коши:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi - z_0| = r} \frac{f_n(\xi)d\xi}{\xi - z}, \quad z \in U_r(z_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi - z_0| = r} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(\xi)\right)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$ (интег. типа Коши)

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \in A(\{z \mid |z - z_0| < r\}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \in A(D) \Rightarrow \blacksquare \text{ (п.1)}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_{|\xi - z_0| = r} \frac{f_n(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_{|\xi - z_0| = r} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} f_j(\xi)\right)d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} = f^{(k)}(z) \Rightarrow \blacksquare \text{ (п.2)}$$

Лемма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) \rightrightarrows$ внутри обл. D $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) \rightrightarrows$ на $\forall$ замкн. круге, лежащем в D

$\rfloor$ $\circledcirc\!\Rightarrow$ очевидно, т.к. круг является компактом

$\Leftarrow$ любой компакт K покроем кругами

по л. Гейне - Бореля, будет достаточно

конечного числа кругов $\Rightarrow$ на $\forall K \subset D$ есть равном. сх-ть

Докажем п.3: $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)} \rightrightarrows$ на $\forall$ круге, принадл. D

Рассм. произвольный круг $\{ z \mid |z-z_0| \le r, r>0 \} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists r_1 > r$ т.ч. $\{ z \mid |z-z_0| < r_1 \} \subset D$

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f_n(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{k+1}};$$

$$\sum_{j=n+1}^{n+p} f_j^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{\left(\sum\limits_{j=n+1}^{n+p} f_j(\xi)\right) d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}$$

$$\left| \sum_{j=n+1}^{n+p} f_j(z) \right| \le \frac{k! \cdot 2\pi r_1}{2\pi} \cdot \frac{\max\limits_{|z-z_0|=r_1} \left| \sum\limits_{j=n+1}^{n+p} f_j(z) \right|}{(r_1 - r)^{k+1}}$$

ряд сх-ся по критерию Коши $\Rightarrow$ ■ (п.3)

■

▶ **Th.** (II-я Вейерштрасса)

$\rfloor$ D - ограниченная область, ∂D - контур

$\rfloor$ $\forall n$ $f_n(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) \rightrightarrows$ на ∂D

$\urcorner$ $\exists f(z)$ т.ч. $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ $\forall z \in \overline{D}$ и $f(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$

$\rfloor$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) \rightrightarrows$ на ∂D $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ т.ч. $\forall n \ge N$, $\forall p \in \mathbb{N}$

$\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon$, $z \in \partial D$

по пр-пу максимума модуля аналит. ф-ции:

$\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon$ $\forall z \in \overline{D}$ $\Rightarrow$ $\cancel{\exists f(z) = \sum\limits_{k=1} f_k(z)}$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z) \rightrightarrows$ на $\overline{D}$; $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z) \in C(\overline{D})$; по I Th. Вейерштрасса $f(z) \in A(D)$

■

- Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ наз-ся <u>степенным</u>

$a_n \in \mathbb{C}$

- <u>Th.</u> (Коши - Адамара)

Пусть дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ (1); $\rceil R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$

1) $R=0 \iff \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \Rightarrow$ (1) сх. только в $z=z_0$

2) $R=\infty \iff \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow$ (1) сх. абсолютно на $\mathbb{C}$,

причем сх. равномерно на $\forall$ компакте

3) $0<R<\infty \Rightarrow$ (1) сх. абсолютно на $\{z \mid |z-z_0|<R\}$,

и сх. равномерно на $\forall$ компакте $K \subset \{z \mid |z-z_0|<R\}$,

расх-ся при $|z-z_0|>R$

$\rceil R>0$; $\mathcal{D} := \{z \mid |z-z_0|<R\}$

$f_n(z) = a_n (z-z_0)^n \in A(\mathbb{C}) \underset{\text{I Th. Вейерштрасса}}{\Longrightarrow} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \in A(\mathcal{D})$

$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(z-z_0)^n\right]^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)\ldots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$, $z \in \mathcal{D}$

$\rceil z=z_0 \Rightarrow f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$; $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)$

– ряд Тейлора

<u>Ex.</u> $f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $|z|<\infty$

$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$

$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z|<\infty$

Th (Тейлора)

$\exists\, f(z) \in A(\mathcal{D}),\ z_0 \in \mathcal{D};\ \exists\, \rho = \rho(z_0, \partial D)$

T $\exists!\ \{a_n\} = \left\{\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right\}$ т.ч. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

I $\{z \mid |z - z_0| < \rho\} \subset \mathcal{D};$

$\exists\ 0 < r_1 < r_2 < \rho \Rightarrow \{z \mid |z - z_0| \le r_1\} \subset \{z \mid |z - z_0| \le r_2\} \subset \{z \mid |z - z_0| \le \rho\}$

$\exists\ z \in \{|z - z_0| \le r_1\} \Rightarrow \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_0| = r_2} \dfrac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} =$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} = \frac{1}{\xi - z_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n\right); \quad \left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| \le \frac{r_1}{r_2} < 1.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_0| = r_2} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}};$$

$a_n := \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_0| = r_2} \dfrac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ — не зависит от z

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad |z - z_0| \le \rho$

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

■

Задача: показать, что если определить e^z как сумму ряда, то она будет иметь период $2\pi i$

Лекция 7. Теорема единственности аналитических ф-й; разложение гарм. ф-й в ряды

$\rceil f(z) \in A(U_\varepsilon(z_0)),\ \varepsilon>0$

- z_0 называется <u>нулем кратности k</u> $f(z)$ if $f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(k-1)}(z_0)=0;\ f^{(k)}(z_0)\neq 0$
- <u>простым нулем</u> $f(z)$ называют ноль кратности 1.

▸ z_0 – нуль кратности $k \Rightarrow \forall z\in U_\varepsilon(z_0)\ \ f(z)=\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ a_k\neq 0$

Получаем: $f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z),\ \varphi\in A(U_\varepsilon(z_0)),\ \varphi(z_0)\neq 0$

▸ <u>Th.</u> (единственности)

$\rceil f(z), g(z)\in A(D);\ \rceil \{z_n\}\in D$ и $z_i\neq z_j$ if $i\neq j$

$\exists z_0$ – предельная точка $\{z_n\}$

Γ if $f(z_k)\equiv g(z_k)\ \forall k\in\mathbb{N} \Rightarrow f(z)\equiv g(z)\ \forall z\in D$

$\rfloor$ z_0 – пред. точка $\Rightarrow \exists\{n_k\}$ т.ч. $\{z_{n_k}\}\to z_0$

обозначим $\{z_{n_k}\}$ как $\{z'_k\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n=z_0$;

$z_0\in D \Rightarrow \exists\varepsilon>0$ т.ч. $U_\varepsilon(z_0)\subset D$.

1) $z\in U_\varepsilon(z_0) \Rightarrow \begin{cases} f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \\ g(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n\end{cases}$ $\quad a_0=f(z_0)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(z'_n)$, $\quad b_0=g(z_0)=\lim\limits_{n\to+\infty} g(z'_n)$

$f(z'_n)\equiv g(z'_n)\ \forall n \Rightarrow a_0=b_0$

2) $f(z)=a_0+(z-z_0)f_1(z),\ f_1(z)\in A(U_\varepsilon(z_0))$; $g(z)=b_0+(z-z_0)g_1(z),\ g_1(z)\in A(U_\varepsilon(z_0))$; $f_1(z'_n)\equiv g_1(z'_n)\ \forall n \xRightarrow{\text{аналогично}} \begin{cases} f_1(z_0)=g_1(z_0)\\ a_1=b_1\end{cases}$

... аналогично, $a_n=b_n \Rightarrow f(z)\equiv g(z)\ \forall z\in U_\varepsilon(z_0)$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

покажем для $\forall\tilde z\in D$: соединим z_0 и $\tilde z$ непр.-й кривой $\Gamma\subset D$; Γ-компакт

покроем Γ кругами радиуса $\frac{\delta}{3}$, $\delta=\rho(\Gamma,\partial D)$ с центрами на Γ.

по л. Гейне-Бореля $\exists$ конечное число кругов, покрыв. Γ

соседние пересек. $\Rightarrow f(z)=g(z)$ в этих кругах $\Rightarrow f(\tilde z)=g(\tilde z)$

Следствие 1 $\quad \rbrack f(z)\in A(D),\ \{z_n\}\subset D,\ z_i\neq z_j,\ i\neq j$

$z_0\in D$ – предельная $\{z_n\}$.

$T^{>}\quad f(z_n)=0,\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(z)\equiv 0,\ z\in D$

Следствие 2 $\quad \rbrack f(z)\in A(D),\ f(z)\not\equiv 0$

$T^{>}$ на $\forall$ компакте $f(z)$ имеет не более конечного числа нулей

Следствие 3 $\quad \rbrack f(z)\in A(D)$

$T^{>}$ или $f(z)\equiv 0$, или в D $f(z)$ имеет не более счетного числа нулей, ~~для~~ которые могут накапл. только на границе

Ex. $\quad D=\{z:\ \operatorname{Re} z>0\};\quad f(z)=\sin\frac{1}{z}\in A(D)$

$f(z_k)=0,\quad z_k=\frac{1}{\pi k},\ k=1,2,\dots$

$z_k\in D,\ \lim\limits_{k\to\infty} z_k=0\notin D$

$0=z_0$ – пред. точка; $z_0\in\partial D,\ f(z_k)=0$, но $f(z)\not\equiv 0$ $\quad$ т.к. $z_0\notin D$

Рассм. гармон. ф-ю $u(x,y)$; $D=\{z:\ |z-z_0|<R\}$ $R>0$

круг D - односвязн. область $\Rightarrow \exists f(z)\in A(D)$ т.ч. $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)$

Разложим $f(z)$ в ст. ряд: $\quad f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n,\quad |z-z_0|<R$

$\rbrack z\in D \Leftrightarrow z=z_0+\rho e^{i\varphi},\quad \rho\in[0;R)$; $\quad \rbrack a_n=\alpha_n+i\beta_n$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha_n+i\beta_n)\rho^n e^{in\varphi}=\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha_n\rho^n\cos n\varphi-\beta_n\rho^n\sin n\varphi)+i\sum_{n=0}^{+\infty}(\beta_n\rho^n\cos n\varphi+\alpha_n\rho^n\sin n\varphi)$$

~~$f(z)$~~ $f(z_0+\rho e^{i\varphi})=u(\rho$